



PEARL

Spreading of a Viscous Fluid Over a Horizontal Surface.

Shapiro, GI

Published in:

PMTF, Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki

Publication date:

1983

Link:

[Link to publication in PEARL](#)

Citation for published version (APA):

Shapiro, GI. (1983). Spreading of a Viscous Fluid Over a Horizontal Surface. *PMTF, Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki*, 0(0), 45-48.

All content in PEARL is protected by copyright law. Author manuscripts are made available in accordance with publisher policies. Wherever possible please cite the published version using the details provided on the item record or document. In the absence of an open licence (e.g. Creative Commons), permissions for further reuse of content should be sought from the publisher or author.

чения и числа Рейнольдса турбулентности, которое в проведенных опытах изменялось более чем в 50 раз.

Автор выражает глубокую признательность В. Л. Зимонту, по предложению которого выполнена работа, и Ю. М. Денисову, оказавшему большую помощь в создании комплекса программ для ЭЦВМ.

Поступила 23 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
2. Щербина Ю. А. Амплитудно-масштабная характеристика турбулентных пульсаций. — В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974.
3. Narayanan M. A. B. Universal trends observed in the maxima longitudinal velocity fluctuations and the zero crossings in turbulent flows. — AIAA J., 1979, vol. 17, N 5. Рус. пер. Ракетн. техн. и космонавтика, 1979, т. 17, № 5.
4. Antonia R. A., Danh N. Q., Prabhu A. Bursts in turbulent flows. — Phys. Fluids, 1976, vol. 19, N 11.
5. Васильев В. И., Юденков Н. А., Богданов В. В. Исследование интенсивности турбулентных пульсаций потока в воздухозаборниках. — Труды ЦАГИ, 1971, вып. 1327.
6. Зимонт В. Л., Прасковский А. А., Тарышкин А. Г. Исследование влияния ограниченности частотного диапазона аппаратуры на результаты измерений параметров турбулентности. — Труды ЦАГИ, 1980, вып. 2048.
7. Колмогоров А. Н. О логарифмически нормальном распределении размеров частиц при дроблении. — ДАН СССР, 1941, т. 31, № 2.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. II. М.: Наука, 1967.
9. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1967.

УДК 532.62

О РАСТЕКАНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Г. И. Шапиро

(Москва)

Растекание вязкой жидкости по поверхности твердого тела играет важную роль в ряде практических задач, например при формировании покрытий твердых тел, при движении газожидкостных смесей и эмульсий в капиллярах и в других случаях [1]. Движение тонкого слоя вязкой жидкости по горизонтальной поверхности вызвано действием сил тяжести и поверхностного натяжения и имеет много общего с движением тонких пленок по наклонной плоскости, которое интенсивно изучалось в течение ряда лет [2—4]. Переход от наклонной плоскости к горизонтальной не является тривиальным, т. е. не сводится к подстановке угла наклона, равного нулю, в окончательные формулы. Дело в том, что движение по горизонтальной плоскости даже в самом грубом приближении описывается дифференциальным уравнением более высокого порядка.

В двумерной постановке задача о растекании вязкой жидкости по горизонтальной плоскости рассматривалась в [5], где получено приближенное нелинейное уравнение для толщины слоя h в зависимости от координаты x и времени t :

$$(1) \quad h_t = (g/3\nu)(h^3 h_x)_x.$$

Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости; g — ускорение силы тяжести. К сожалению, в [5] фактически не учтено влияние поверхностного натяжения.

В противоположном предельном случае, когда силой тяжести можно пренебречь по сравнению с силой поверхностного натяжения, уравнение для $h(x, t)$ получено в [6] (также только в двумерной постановке):

$$(2) \quad h_t + (\sigma/3\rho\nu)(h^3 h_{xxx})_x = 0,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости.

В данной работе рассматривается трехмерная задача о движении вязкой несжимаемой жидкости по горизонтальной плоскости с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения. Наклон свободной поверхности предполагается малым, а движение — достаточно медленным (ползущим), так что инерционными силами можно пренебречь по сравнению с вязкими. При этом, как будет показано, число Рейнольдса не обязательно должно быть мало. На изменения толщины слоя $h(x, y, t)$ ограничения не накладываются, в частности, h может обращаться в нуль, как это бывает при растекании капли.

Для описания динамики жидкости воспользуемся уравнениями Навье — Стокса при следующих граничных условиях. На поверхности твердого тела — прилипание:

$$(3) \quad \mathbf{u}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0.$$

Здесь \mathbf{u} — вектор горизонтальной скорости; w — вертикальная компонента скорости; z — вертикальная координата.

На свободной поверхности граничным условием является непрерывность нормального σ_{nn} и касательного $\sigma_{n\tau}$ напряжений [7]:

$$(4) \quad \sigma_{nn}|_{z=h} = -p_a + \sigma \frac{\Delta h}{[1 + (\nabla h)^2]^{3/2}}, \quad \sigma_{n\tau}|_{z=h} = 0,$$

где p_a — атмосферное давление (считаем, что $p_a = \text{const}$); σ — коэффициент поверхностного натяжения; ∇ , Δ — двумерные (в горизонтальной плоскости x, y) операторы Гамильтона и Лапласа. Кинематическое граничное условие удобно скомбинировать с уравнением неразрывности и записать в виде

$$(5) \quad h_t + \nabla \int_0^h \mathbf{u} dz = 0.$$

Пусть характерная толщина слоя равна H , а характерный горизонтальный размер L . За масштаб горизонтальной скорости выберем величину $U = gH^3/\nu L$, которая определяется из условия баланса характерных величин горизонтального градиента гидростатического давления и сил вязкости. Введем безразмерные переменные по формулам:

$$\mathbf{u} = U\mathbf{u}', \quad w = \alpha U w', \quad x = Lx', \quad y = Ly',$$

$$z = H\xi, \quad h = H\eta, \quad t = T\tau, \quad p = p_a + \rho g(h - z) + P p',$$

где

$$\alpha = H/L; \quad P = \rho gH; \quad T = L/U = \nu L^2/gH^3,$$

гидростатическая составляющая $\rho g(h - z)$ давления p для удобства выделена в отдельное слагаемое.

В этих переменных уравнения Навье — Стокса условие несжимаемости и уравнение (5) записываются в виде

$$(6) \quad \text{Fr}^2 (\mathbf{u}'_\tau + (\mathbf{u}' \nabla) \mathbf{u}' + w' \mathbf{u}'_\xi) = -\nabla \eta - \nabla p' + \mathbf{u}'_{\xi\xi} + \alpha^2 \Delta \mathbf{u}';$$

$$(7) \quad \alpha^2 \text{Fr}^2 (w'_\tau + (\mathbf{u}' \nabla) w' + w' w'_\xi) = -p'_\xi + \alpha^2 w'_{\xi\xi} + \alpha^4 \Delta w';$$

$$(8) \quad \Delta \mathbf{u}' + w'_\xi = 0;$$

$$(9) \quad \eta_\tau + \nabla \int_0^\eta \mathbf{u}' d\xi = 0,$$

где $\text{Fr}^2 = gH^5/\nu^2 L^2 = U^2/gH$ — квадрат числа Фруда. Для краткости безразмерные операторы ∇ , Δ обозначены теми же символами, что и размерные.

Выведем уравнение, описывающее эволюцию свободной поверхности $\eta(x', y', \tau)$ при малых значениях α^2 и достаточно медленных движениях жидкости. Из уравнений (6), (7) видно, что в рассматриваемой задаче условие «медленности» движения, т. е. малости инерционных членов по сравнению с вязкими, является малость числа Фруда Fr , а не числа Рейнольдса $\text{Re} = UH/\nu = gH^4/\nu^2 L$. Легко убедиться, что число Рейнольдса связано с числом Фруда соотношением $\text{Fr}^2 = \alpha \text{Re}$, так что условие $\text{Fr}^2 \ll 1$ может выполняться и при $\text{Re} \gg 1$, если только $\alpha^2 \ll 1$. Следовательно, при асимптотическом анализе удобно воспользоваться разложением величин \mathbf{u}' , w' , p' в ряды по двум независимым малым параметрам α^2 и Fr^2 :

$$(10) \quad \mathbf{u}' = \sum_{n,n} \mathbf{u}'_{mn} \alpha^{2m} \text{Fr}^{2n}.$$

Замкнутое уравнение для η получается следующим образом. Подставляем разложение (10) в уравнения (6) — (8) и граничные условия и решаем эту систему, считая $\eta(x', y', \tau)$ заданным. В каждом приближении по α^2 , Fr^2 решение сводится к интегрированию известных функций по вертикали и может быть выполнено в конечном виде. Найденное решение $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_{00} + Fr^2 \mathbf{u}'_{01} + \alpha^2 \mathbf{u}'_{10} + \dots$, зависящее функционально от η , подставляем затем в уравнение (9). Интересно, что при таком выводе не требуется раскладывать величину η в ряд по малым параметрам. Это не только упрощает выкладки, но и позволяет не накладывать никаких дополнительных ограничений на амплитуду изменений η .

Отметим, что в тонких пленках жидкости часто выполняется соотношение $\alpha^2 \ll Fr^2 \ll 1$. Например, для воды при $H = 0,3$ мм, $L = 1$ см, $\nu = 10^{-2}$ см²/с получим $\alpha^2 = 9 \cdot 10^{-4}$, $Fr^2 = 0,2 \gg \alpha^2$. Поэтому в асимптотическом разложении (10) нужно в первую очередь учитывать поправки по Fr^2 , а члены $\sim \alpha^2$ в низших приближениях (которые и представляют основной интерес) можно вовсе не учитывать. При этом граничные условия (4) существенно упрощаются и в безразмерных переменных принимают вид

$$(11) \quad \mathbf{u}'_{\xi} \Big|_{\xi=\eta} = 0, \quad p' \Big|_{\xi=\eta} = -We\Delta\eta,$$

где $We = \sigma/\rho g L^2$ — число Вебера.

В нулевом приближении по α^2 , Fr^2 горизонтальный вектор скорости \mathbf{u}'_{00} , найденный из (3), (6), (7), (11), имеет вид

$$(12) \quad \mathbf{u}'_{00} = \eta^2 \left(\frac{\xi^2}{2\eta^2} - \frac{\xi}{\eta} \right) \nabla (\eta - We\Delta\eta).$$

Подставляя это выражение в (9), получаем нелинейное уравнение для $\eta(x', y', \tau)$ нулевого приближения*. Запишем его сразу в размерных переменных:

$$(13) \quad h_t - \frac{\sigma}{3\gamma} \nabla (h^3 \nabla h) + \frac{\sigma}{3\rho\nu} \nabla (h^3 \nabla \Delta h) = 0.$$

После того как $\eta(x', y', \tau)$ найдено из решения уравнения (13), горизонтальную скорость находим по формуле (12), а вертикальную — из условия несжимаемости (8).

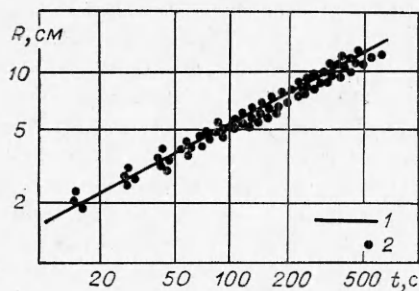
В первом приближении по Fr^2 уравнение для η выглядит более громоздко, поэтому выпишем его для случая, когда членом с We можно пренебречь:

$$\eta_t - \frac{4}{3} \nabla (\eta^3 \nabla \eta) + Fr^2 \nabla \left\{ \frac{47}{180} \eta^6 \nabla \eta (\nabla \eta)^2 + \frac{644}{3780} \eta^7 \Delta \eta \nabla \eta + \frac{4}{105} \eta^7 \nabla [(\nabla \eta)^2] + \right. \\ \left. + \frac{2}{45} \eta^8 \Delta \nabla \eta \right\} = 0.$$

Проанализируем подробнее уравнение нулевого приближения (13). В двух предельных случаях это уравнение переходит в известные уравнения. При $\sigma = 0$ (отсутствует поверхностное натяжение) и $\partial/\partial y = 0$ получаем уравнение (1). При $g = 0$ (отсутствует сила тяжести) и $\partial/\partial y = 0$ получаем уравнение (2).

При $\sigma = 0$ уравнение (13) относится к классу нелинейных параболических уравнений, многочисленные автомодельные решения которых найдены в [9, 10] в связи с задачами теории тепловых волн и теории фильтрации. В частности, если при растекании осесимметричной жидкой капли в ее центре имеется приток жидкости с интенсивностью Q , а на бесконечности выполняется условие $\eta = 0$, то автомодельное решение укороченного уравнения (13) имеет вид, указанный в [10], и отлично от нуля лишь в

* Для частного случая $\partial/\partial y = 0$ это уравнение получено другим способом в работе [8], на которую автору любезно указал рецензент.



конечной области $0 < r < R(t)$. Радиус капли R растет со временем по закону (14) $R(t) = A Q^{3/8} (g/\nu)^{1/8} t^{1/2}$.

Численное интегрирование дает для коэффициента A значение 0,62. Формула (14) согласуется (с точностью до некоторого отличия в числовом коэффициенте) с результатами эксперимента [11], где осесимметричное пятно глицерина растекалось по стеклу. На фигуре цифрой 1 обозначена теоретическая зависимость (14) при $A = 0,3$, цифрой 2 — экспериментальные данные [11] при $Q = 0,91 \pm 0,04 \text{ см}^3/\text{с}$, $\nu = 6,2 \text{ см}^2/\text{с}$. Оценки показывают, что в условиях этих опытов $We \ll 1$, т. е. влияние поверхностного натяжения действительно мало. Если приток жидкости отсутствует, то автомодельное решение уравнения (13) дает для осесимметричной капли объема V расширение по закону

$$(15) \quad R = \text{const } V^{3/8} (g/\nu)^{1/8} t^{1/8}.$$

При $\sigma \neq 0$ уравнение (13) содержит пространственные производные более высокого порядка, и для его решения необходимы дополнительные граничные условия, например величина угла смачивания.

В простейшем случае двумерной ($\partial/\partial y = 0$) неподвижной капли объема V из уравнения (13) легко получить форму $h(x)$ и длину $2d$ капли аналитически:

$$h(x) = \beta (\text{ch } ad - \text{ch } ax) / (a \text{ sh } ad),$$

где $a = \sqrt{\rho g / \sigma}$ — капиллярная постоянная; β — тангенс угла смачивания, а величина d определяется из уравнения $(1 + Va^2/2\beta) \text{th } ad = ad$, что полностью совпадает с известным из гидростатики результатом [12].

Поступила 6 IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О. В.** Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости. — ДАН СССР, 1978, т. 243, № 6.
2. **Каница П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. — ЖЭТФ, 1948, т. 18, № 1.
3. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.
4. **Шкадов В. Я.** Уединенные волны в слое вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
5. **Nakaya C.** Spread of fluid drops over a horizontal plate. — J. Phys. Soc. Jap., 1974, vol. 37, N 2.
6. **Воинов О. В.** Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях. — ПМТФ, 1977, № 2.
7. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973.
8. **Kamin S.** Continuous groups of transformation of differential equations: applications to free boundary problems. — In: Free boundary problems: Proceedings of a seminar held in Pavia in September — October 1979. Vol. 2. Roma: Istituto nazionale di alta matematica Francesco Severi, 1980.
9. **Зельдович Я. Б., Компанец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. — В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
10. **Баренблатт Г. И.** О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. — ПММ, 1952, т. 16, № 1.
11. **Зацепин А. Г., Шапиро Г. И.** Исследование осесимметричной интрузии в стратифицированной жидкости. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982, т. 18, № 1.
12. **Гидромеханика невесомости/Под ред. А. Д. Мышкина.** М.: Наука, 1976.